

Nom et Prénom : EL BOUKILI ABDELAZIZ

Date de soutenance : 03/06/2023

Directeur de Thèse : BOUAZZA EL WAHBI

Sujet de Thèse :

Sur le problème de moments tronqué bidimensionnel réel : Étude des cas cubique et quintique

Résumé :

Dans cette thèse, nous nous intéressons à la résolution du problème de moments tronqué bidimensionnel réel associé à une suite $\beta^{(m)} = \{\beta_{ij}\}_{0 \leq i+j \leq m}$ où $m \in \mathbb{N}^*$.

Au début, nous nous focalisons sur une classe du problème de moments quintique ($m = 5$) où la matrice des moments associée $M(2)$ est semi-définie positive et admettant une extension $M(3)$ plate ou semi-définie positive avec $\text{rang } M(3) = \text{rang } M(2) + 1$. Nous explicitons une mesure représentative minimale ($\text{rang } M(2)$)-atomique ou $(\text{rang}(M(2)) + 1)$ -atomique après avoir précisé les conditions d'existence. Nous énonçons également quelques cas où aucune mesure représentative n'existe.

Des exemples sont donnés pour chaque cas afin d'illustrer la construction des mesures représentatives lorsqu'elles existent, ainsi que pour mettre en évidence les conflits derrière l'irrésolvabilité.

Après, nous nous centrons sur le problème de moments tronqué cubique réel ($m = 3$). D'abord, nous investiguons des résultats qui permettent d'obtenir une solution complète via une mesure représentative minimale pour ce type de problèmes. En vue de mettre en évidence la simplicité de notre approche, des exemples numériques sont fournis.

En fin de ce travail, nous abordons le problème de moments tronqué de Hamburger, qui relève du cas unidimensionnel, lié à une suite $s = s^{(m)} = (s_i)_{i \leq m}$. Il est important de signaler que les résultats trouvés ne dépendent pas de la parité de l'entier naturel m . Un algorithme a été élaboré en établissant un lien entre le problème du moment et les opérateurs de Jacobi. En conséquence, l'approche adoptée permet de confirmer ou d'infirmer si une suite finie est une suite de moment de Hamburger.

Mots clés : problème du moment tronqué, problème du moment tronqué quintique réel, problème du moment tronqué cubique réel, matrice de Hankel, matrice de moment déterminée récursivement, extension plate, mesure représentative, opérateur de Jacobi.

Abstract:

In this thesis, we are interested in solving the real two-dimensional truncated moments problem associated with a sequence $\beta^{(m)} = \{\beta_{ij}\}_{0 \leq i+j \leq m}$ where $m \in \mathbb{N}^*$.

At first, we focus on a class of the quintic moment problem ($m = 5$) where the associated moment matrix $M(2)$ is positive semidefinite and admits an extension $M(3)$, flat or positive semidefinite with $\text{rank } M(3) = \text{rank } M(2) + 1$. We explicit a minimal representing measure ($\text{rank } M(2)$)-atomic or $(\text{rang}(M(2)) + 1)$ -atomic after having specified the existence conditions. We also state some cases where no representing measure exists.

Examples are given for each case to illustrate the construction of representative measures when they exist, as well as to highlight the conflicts behind irresolvability.

Afterwards, we focus on the real cubic truncated moment problem ($m = 3$). First, we investigate results that allow to obtain a complete solution via a minimal representative measure for this type of problem. In order to highlight the simplicity of our approach, numerical examples are provided.

At the end of this work, we discuss the Hamburger truncated moment problem, which belongs to the one-dimensional case, related to a sequence $s = s^{(m)} = (s_i)_{i \leq m}$. It is important to note that the results found do not depend on the parity of the integer number m . An algorithm has been developed by linking the moment problem to Jacobi operators. As a result, the adopted approach allows to confirm or to deny whether a finite sequence is a Hamburger moment sequence.

Key words : truncated moment problem, uintic real truncated moment problem, cubic real truncated moment problem, Hankel matrix, recursively determined moment matrix, flat extension, representing measure, Jacobi operator.