

Nom et Prénom : ZOUAKI ADIL

Date de soutenance : 24/11/2022

Directeur de Thèse : ECH-CHAD MOHAMED

Sujet de Thèse :

Les opérateurs P-symétriques, images et noyaux des opérateurs élémentaires

Résumé :

Résumé : L'objectif de cette thèse est de présenter quelques résultats concernant les opérateurs D-symétriques, les opérateurs P-symétriques, l'orthogonalité de l'image et le noyau d'une dérivation généralisée, et quelques opérateurs élémentaires.

La première partie, accorde une intention particulière à l'étude des opérateurs P-symétriques, les opérateurs $A \in L(H)$ qui satisfait la propriété suivante, $AT = TA$ implique $AT^* = T^*A$ pour chaque $T \in C_1(H)$, nous obtenons quelques résultats concernant l'intersection de la fermeture de l'image $R(\delta_A)$ de δ_A et du commutant $\{A\}'$ de A . Nous prouvons que si A est un opérateur rationnellement sous normal cyclique, alors A est D-symétrique. De plus, nous établissons quelques nouvelles propriétés concernant les sous algèbres $C_0(A)$, $I_0(A)$ et $B_0(A)$ de $L(H)$. Ensuite, nous étudions la classe des couples des opérateurs (A, B) dans $L(H)$ tels que $\overline{R(\delta_{A,B})}^{\omega^*} = \overline{R(\delta_{A^*, B^*})}^{\omega^*}$. Ainsi, nous introduisons la classe des opérateurs essentiellement D-symétriques.

Dans la deuxième partie, nous donnons les opérateurs A, B pour lesquels le couple (A, B) admet la propriété $(FP)_J$. Nous établissons l'orthogonalité de l'image et le noyau d'une dérivation généralisée $\delta_{A,B}$ pour les opérateurs non normaux A, B de $L(H)$. Ensuite, nous obtenons également de nouveaux résultats concernant l'intersection de la fermeture de l'image et du noyau de $\delta_{A,B}$.

Par la suite, nous obtenons des conditions nécessaires et suffisantes pour que :

- (i) l'image de l'opérateur élémentaire $\Delta_{(A,B),(C,D)}$ est dense pour les topologies faibles et ultra-faibles,
- (ii) la fermeture pour la norme de l'image contient l'idéal $K(H)$ des opérateurs compacts sur H , ce qui généralise les résultats de Williams. D'autre part nous initions une étude sur la classe des quadruplets D-symétriques et la classe des quadruplets P-symétriques. De plus nous introduisons les quadruplets D*-symétriques et les quadruplets D*-symétriques généralisés. Enfin, nous établissons que si $\{A, B\}$ et $\{C, D\}$ sont des paires commutantes d'opérateurs normaux, alors (A, B, C, D) est généralisé D*-symétrique.

Mots-clés : Dérivation, Dérivation généralisée, Opérateur D-symétrique, Opérateur P-symétrique, Opérateur élémentaire, Opérateur sous-normal, Opérateur dominant, Orthogonalité Image-Noyau, Propriété Fuglede-Putnam.

Abstract:

Abstract: The objective of this thesis is to present some results concerning D-symmetric operators, P-symmetric operators, the orthogonality of the range and the kernel of a generalized derivation, and some elementary operators.

In the first part, we study the class of P-symmetric operators that is the class of operators $A \in L(H)$ which satisfy the following property, $AT = TA$ implies $AT^* = T^*A$ for all $T \in C_1(H)$. We obtain new results concerning the intersection of the closure of $R(\delta_A)$ and the commutant $\{A\}'$ of A . We prove that if A is a rationally cyclic subnormal operator, then A is D-symmetric. Also, we establish some new properties concerning the subalgebras $C_0(A)$, $I_0(A)$ and $B_0(A)$ of $L(H)$. Then, we initiate the study of the pairs (A, B) of operators $A, B \in L(H)$ such that $\overline{R(\delta_{A,B})}^{\omega^*} = \overline{R(\delta_{A^*, B^*})}^{\omega^*}$. Thus, we introduce the class of essentially D-symmetric operators.

In the second part, we give operators A, B for which the pair (A, B) has the property $(FP)_J$. We Establish the orthogonality of the range and the kernel of a generalized derivation $\delta_{A,B}$ for non-normal Operators $A, B \in L(H)$. We also obtain new results concerning the intersection of the closure of the range and the kernel of $\delta_{A,B}$.

In the last part, we obtain simple necessary, and sufficient conditions that: (i) The range of the elementary operator $\Delta_{(A,B),(C,D)}$ is dense in the weak and ultra-weak operator topologies, (ii) The norm closure of the range contains the ideal $K(H)$ of compact operators on H , which generalizes the results of Williams. We initiate the study on the class of D-symmetric quadruplets and the class of P-symmetric quadruplets. Furthermore, we introduce the class of D*-symmetric quadruplets and the class of generalized D*-symmetric quadruplets. Finally, we establish that if $\{A, C\}$ and $\{B, D\}$ are commuting pairs of normal operators, then (A, B, C, D) is generalized D*-symmetric.

Keywords: Derivation, Generalized derivation, D-symmetric operator, P-symmetric operator, Elementary operator, Subnormal operator, Dominant operator, Range-Kernel Orthogonality, Fuglede-Putnam property.

